1.4 – 12　　1.4 – 34

课程：8.1 P163　　14-206　　10-111

华东交通大学考试专用答题纸（适用于匿名改卷）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

考生注意：答题时应注明题号，并按题号顺序答题。

题号		第8章 无穷级数及其应用　答题内容　理学院 廖国勇
一	1	极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \dfrac{\arctan(xy)}{y} =$
		解：∵ $x\to a, y\to 0$ 时，$xy\to 0$，∴ $\arctan(xy)\sim xy$
		$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \dfrac{\arctan(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} x = a$
		（等价无穷小替换）
	2	极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\dfrac{1}{x}\sin y + \dfrac{1}{y}\sin x\right) = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\dfrac{1}{x}\sin y\right) + \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\dfrac{1}{y}\sin x\right)$
		无穷小　有界量
		$= 0 + 0 = 0$
		（无穷小乘以有界量是无穷小）
	3	极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\cos(\pi x+y)}{\ln(x+e^y)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\cos(\pi+0)}{\ln(1+e^0)} = -\dfrac{1}{\ln 2}$
		（初等函数在其定义区域内是连续的，连续函数趋于连续点的极限等于该点的函数值）

教学小班序号：_____　教学班级：_____　学号：_____　姓名：_____

P163 8.1

-4 函数 $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 的间断点为 ____

解 令 $y^2-2x=0 \Rightarrow y^2=2x$

(初等函数在其定义域内都是连续的，不连续的点就是没有定义的点，函数的定义域是使表达式有意义的域)

=1 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$

解：方法一，分子有理化

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(\sqrt{xy+4}-2)(\sqrt{xy+4}+2)}{xy(\sqrt{xy+4}+2)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\sqrt{xy+4}+2}=\frac{1}{4}$$

方法二，等价无穷小替换

$x\to0, y\to0$ 时 $xy\to0$，$\sqrt{xy+4}-2=2(\sqrt{1+\frac{xy}{4}}-1)\sim2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{xy}{4}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{xy}{4}}{xy}=\frac{1}{4}$$

(在上学期学习中知：$x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim(e^x-1)$.

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$. $a^x-1\sim x\ln a$

在本题中把 xy 看成一个整体，当然 $\frac{xy}{4}$ 也看成一个整体

$\sqrt{1+\frac{xy}{4}}-1=(1+\frac{xy}{4})^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{xy}{4}$

2 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$

解：用夹逼准则 $0\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{1}{2}|x|$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}0=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{2}|x|=0$

$\therefore\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=0$ $\therefore\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

$\left(x^2+y^2\geq2|xy|,\ \frac{|xy|}{|x^2+y^2|}\leq\frac{1}{2}\right)$

用另一种思路，直接算

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

（x：无穷小；$\frac{xy}{x^2+y^2}$：有界量）

3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to0}}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

解：原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to0}}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{x+y}\cdot\frac{2}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to0}}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2x}{x+y}}$

$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to0}}\frac{2x}{x+y}}$

$=e^2$

注 1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

2. 若 $\lim\alpha(x)=A$ $\lim\beta(x)=B$ $A>0$ 且 $A\neq1$

$\lim\alpha(x)^{\beta(x)}=[\lim\alpha(x)]^{\lim\beta(x)}=A^B$

在做题中 $A=e$ 的情况较多

P164 8.1

4 判断极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$ 是否存在.

解：设 $y=kx$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{kx^2+k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k+k^2}{1+k^2}$$

结果与k有关，即选取不同的路径极限不同，所以原函数在 $x\to0$ $y\to0$ 的过程中极限不存在。

一般地，选取两条特殊的路径求极限，若这两条路径中有一条路径的极限不存在或者两条路径的极限都存在但不相等则可得原极限不存在。

特别要注意一点的是：若你选了无数条路径求极限，这些路径的极限都存在且相等，也不能推出原极限存在，例如设

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq0\\ 1, & xy=0\end{cases}$$

对于任意的路径 $y=kx$ $(k\neq0)$，当然这样的路径有无穷多条，但是

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0\\k\neq0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0\\k\neq0}}0=0$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 的极限不存在，因为沿坐标轴方向的路径

有 $\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to0}}f(x,y)=1=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}f(x,y)$.

三 P164 8.1

证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在

证明：选一特殊的路径：$y=-x+x^3$，则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y=-x+x^3}}\frac{\frac{1}{2}x(-x+x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to-x+x^3}}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\infty$$ 极限不存在

∴ 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在。

$\sqrt{xy+1}-1=(1+xy)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}xy\sim-\frac{1}{2}x^2$

$y=-x+x^3\sim(-x)$

若选取路径 $y=x$，则 $\sqrt{xy+1}-1\sim\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y=x\to0}}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$$

若选取路径 $y=-x+x^2$，则 $\sqrt{xy+1}-1\sim\frac{1}{2}xy\sim-\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y=-x+x^2\to0}}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}\neq0$$

两条路径极限都存在，但不相等，故原极限不存在。